

## ГЛАВА 16. БИБЛИОТЕКА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Матрицы жёсткости, масс и устойчивости, а также векторы нагрузок получаем суммированием соответствующих матриц и векторов каждого КЭ, которые вычисляет библиотека конечных элементов (БКЭ), используя соответствующие функционалы возможных работ и базисные функции.

Базисные функции зависят только от геометрических характеристик элемента и порядка производных в функционале возможных работ внутренних сил. При наличии изгиба или стеснённого кручения порядок производных равен двум, в остальных случаях – единице.

### 16.1 Состав БКЭ

#### По геометрическим характеристикам

- стержни постоянного и переменного сечения: брус, тавр, двутавр, швеллер, короб, кольцо;
- 3- и 6-узловые треугольники, 4- и 8-узловые четырехугольники постоянной толщины;
- 8- и 20-узловые шестигранники, 6- и 15-узловые пятигранники, 4- и 10-узловые тетраэдры.

#### По типам задач

- Стержни:
  - Линейные:
    - №1 – плоская ферма;
    - №4 – пространственная ферма;
    - №3 – балочный стержень;
    - №10 – пространственная рама без стесненного кручения;
    - №7 – пространственный стержень со стесненным кручением.
  - Физически нелинейные, нелинейная упругость:
    - №201 – плоская ферма;
    - №204 – пространственная ферма;
    - №210 – пространственная рама.
  - Геометрически нелинейные:
    - №301 – плоская нить;
    - №304 – пространственная нить;
    - №310 – пространственная рама;
    - №309 – сильный изгиб без стесненного кручения;
    - №307 – сильный изгиб со стесненным кручением.
  - Физически и геометрически нелинейные, нелинейная упругость:
    - №401 – плоская нить;
    - №404 – пространственная нить;
    - №410 – пространственная рама, сильный изгиб.
- Двумерные элементы:
  - Линейные элементы изгибаемой плиты.

- Тонкие, теория Кирхгофа:
  - №12 – трехузловой треугольник;
  - №13 – шестиузловой треугольник;
  - №19 – четырехузловой четырехугольник;
  - №20 – восьмиузловой четырехугольник.
- Толстые, теория Рейснера:
  - №16 – трехузловой треугольник;
  - №14 – шестиузловой треугольник;
  - №17 – четырехузловой четырехугольник;
  - №18 – восьмиузловой четырехугольник.
- Линейные элементы плоского напряженного состояния и плоской деформации:
  - Произвольного положения:
    - №24 – трехузловой треугольник;
    - №26 – шестиузловой треугольник;
    - №27 – четырехузловой четырехугольник;
    - №28 – восьмиузловой четырехугольник.
- Линейные элементы оболочки:
  - Тонкие, теория Кирхгофа:
    - №42 – трехузловой треугольник;
    - №43 – шестиузловой треугольник;
    - №44 – четырехузловой четырехугольник;
    - №50 – восьмиузловой четырехугольник.
  - Толстые, теория Рейснера:
    - №46 – трехузловой треугольник;
    - №48 – шестиузловой треугольник;
    - №47 – четырехузловой четырехугольник;
    - №49 – восьмиузловой четырехугольник.
- Физически нелинейные элементы плоского напряженного состояния и плоской деформации, упруго-пластичность:
  - Произвольного положения:
    - №224 – трехузловой треугольник;
    - №226 – шестиузловой треугольник;
    - №227 – четырехузловой четырехугольник;
    - №228 – восьмиузловой четырехугольник.
- Элементы грунтового массива, вертикальные, плоская деформация:
  - №282 – трехузловой треугольник;
  - №283 – шестиузловой треугольник;
  - №284 – четырехузловой четырехугольник;
  - №285 – восьмиузловой четырехугольник.
- Физически нелинейные элементы оболочек, нелинейная упругость:
  - Тонкие, теория Кирхгофа:
    - №242 – трехузловой треугольник;
    - №243 – шестиузловой треугольник;
    - №244 – четырехузловой четырехугольник;

- №250 – восьмиузловой четырехугольник.
- Толстые, теория Рейснера:
  - №246 – трехузловой треугольник;
  - №248 – шестиузловой треугольник;
  - №247 – четырехузловой четырехугольник;
  - №249 – восьмиузловой четырехугольник.
- Геометрически нелинейные элементы тонких оболочек (дополнительно задается признак: теория Фон Кармана, мембрана, сильный изгиб):
  - №342 – трехузловой треугольник;
  - №343 – шестиузловой треугольник;
  - №344 – четырехузловой четырехугольник;
  - №350 – восьмиузловой четырехугольник.
- Физически и геометрически нелинейные элементы тонких оболочек, сильный изгиб:
  - №442 – трехузловой треугольник;
  - №443 – шестиузловой треугольник;
  - №444 – четырехузловой четырехугольник;
  - №450 – восьмиузловой четырехугольник.
- Трехмерные элементы:
  - Линейные:
    - №36 – восьмиузловой шестигранник;
    - №37 – двадцатиузловой шестигранник;
    - №34 – шестиузловой пятигранник;
    - №39 – пятнадцатиузловой пятигранник;
    - №32 – четырехузловой тетраэдр;
    - №38 – десятиузловой тетраэдр.
  - Физически нелинейные, упруго-пластичность:
    - №236 – восьмиузловой шестигранник;
    - №237 – двадцатиузловой шестигранник;
    - №234 – шестиузловой пятигранник;
    - №239 – пятнадцатиузловой пятигранник;
    - №232 – четырехузловой тетраэдр;
    - №238 – десятиузловой тетраэдр.
  - Элементы грунтового массива:
    - №276 – восьмиузловой шестигранник;
    - №277 – двадцатиузловой шестигранник;
    - №274 – шестиузловой пятигранник;
    - №279 – пятнадцатиузловой пятигранник;
    - №272 – четырехузловой тетраэдр;
    - №278 – десятиузловой тетраэдр.
- Специальные элементы
  - одно- и двухузловые элементы упругой связи, №56, №55;
  - одно- и двухузловые элементы законтурного упругого основания, №54, №53;
  - геометрически нелинейный элемент предварительного напряжения, №308;

- односторонние элементы предварительного напряжения, №208 – натяжение, №207 – сжатие;
- одно- и двухузловые элементы односторонней связи, №266, №265 – по перемещениям, №256, №255 – по усилиям;
- одно- и двухузловые элементы одностороннего трения, закон Кулона, №263, №264;
- элементы неотражающей границы:
  - одномерный №68;
  - двумерные:
    - №62 – трехузловой треугольник;
    - №63 – шестиузловой треугольник;
    - №64 – четырехузловой четырехугольник;
    - №65 – восьмиузловой четырехугольник.

### Дополнительные сведения

Для линейных и физически нелинейных изгибаемых элементов возможен учет сдвига и упругого основания, которое может работать и как одностороннее.

Для стержней допускаются жесткие вставки и шарниры в начале и конце гибкой части, для оболочек – жесткие вставки, перпендикулярные плоскости элемента.

При наличии шарниров выполняется Жорданово исключение.

Все элементы могут иметь узлы, принадлежащие одному или нескольким абсолютно жестким телам (АТТ). Матрицы и векторы преобразуются в соответствии с формулами для перемещений АТТ. Жесткие вставки – АТТ с двумя узлами.

В БКЭ отсутствуют криволинейные элементы стержней и оболочек, т.к. сходимость прямолинейных и плоских элементов доказана в [21, 22, 59, 76].

Материал двумерных и трехмерных физически линейных элементов может быть изотропный или ортотропный, для элементов грунта применяются теории прочности Кулона-Мора, Друккера-Прагера, Боткина и аналитическая [14]. В физически нелинейных элементах возможно наличие двух материалов (бетон и арматура).

Для двумерных элементов допускается дополнительное узловое неизвестное – поворот вокруг оси, перпендикулярной плоскости [89], что позволяет избавиться от геометрической изменяемости.

Нагрузки на элементы: сосредоточенные, равномерно распределенные по области или грани, температурные – для всех, кроме специальных, линейно распределенные по области или стороне – для стержней и пластин.

## 16.2 СТЕРЖНЕВЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

### КЭ-3 балочного стержня

Частный случай универсального конечного элемента КЭ-10. Применяется для расчёта балочных роствершков, расположенных в плоскости  $XOY$ . В каждом узле присутствует 3 степени свободы:

- $Z$  – перемещение вдоль оси  $Z$ ;

- $UX$  – поворот вокруг оси  $X$ ;
- $UY$  – поворот вокруг оси  $Y$ .

#### КЭ-4 ферменного стержня

КЭ-4 является частным случаем универсального конечного элемента КЭ-10. Применяется для расчёта пространственных ферм. В каждом узле присутствует 3 степени свободы:

- $X$  – перемещение вдоль оси  $X$ ;
- $Y$  – перемещение вдоль оси  $Y$ ;
- $Z$  – перемещение вдоль оси  $Z$ .

#### КЭ-7 тонкостенного стержня

КЭ-7 является обобщённым случаем КЭ 10. Имеет дополнительную седьмую степень свободы и применяется для расчёта конструкций с тонкостенными стержнями, согласно теории Власова.

Может работать только при расчёте пространственных конструкций с учётом деформации стержней ( $X, Y, Z, UX, UY, UZ, W$ ).

#### Универсальный КЭ-10 пространственного стержня

Стержень имеет местную правую декартову систему координат  $X_1, Y_1, Z_1$ , относительно которой задаются местные нагрузки и определяются усилия. Ось  $X_1$  направлена по продольной оси стержня от начала к концу. Оси  $Y_1$  и  $Z_1$  являются главными центральными осями инерции.

По умолчанию полагается, что у произвольно ориентированных стержней ось  $Z_1$  всегда направлена в верхнее полупространство, а ось  $Y_1$  параллельна горизонтальной плоскости  $XOY$  глобальной системы координат, а у вертикальных стержней – параллельна оси  $Y$  глобальной системы координат и направлена в противоположную сторону. Если же положение главных центральных осей у реального стержня не совпадает с положением, принятым по умолчанию, то необходимо задавать положение оси  $Y_1$  (рисунок 16.1).

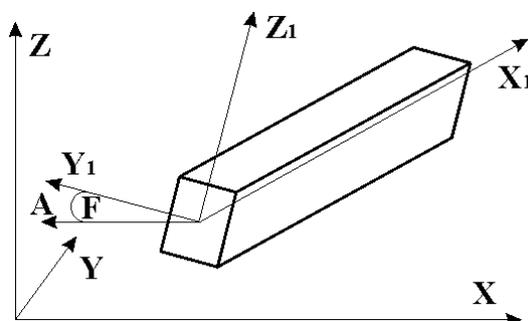


Рисунок 16.1 Универсальный КЭ пространственного стержня

Предусматриваются различные возможности прикрепления стержня к узлам схемы:

- при помощи абсолютно жёстких вставок вдоль местных или глобальных осей;

- при помощи снятия связи по любому направлению (снятие линейной связи обеспечивает проскальзывание; снятие угловой связи – свободный поворот, то есть цилиндрический шарнир).

Матрица жёсткости строится для гибкой части стержня. Привязки сосредоточенной и трапециевидной нагрузок задаются относительно гибкой части стержня, то есть возможны отрицательные привязки.

Конечный элемент может работать во всех признаках схем, применяемых при расчёте стержневых конструкций.

### **КЭ-204 физически нелинейный шаговый КЭ ферменного стержня**

Данный КЭ является частным случаем универсального КЭ-4. Предназначен для расчёта пространственных ферм с учётом физической нелинейности материала. В каждом узле присутствует 3 степени свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z$ .

Может работать во всех типах создаваемых задач.

### **КЭ-210 физически нелинейный универсальный шаговый КЭ пространственного стержня**

Конечный элемент обеспечивает расчёт всех видов стержневых систем с учётом физической нелинейности материала и является аналогом универсального линейного стержневого конечного элемента (тип КЭ-10).

КЭ может работать со всеми признаками схемы.

Конечный элемент имеет местную правую декартову систему координат. На рисунке 16.2 представлено схематическое изображение КЭ и последовательность нумерации его узлов.

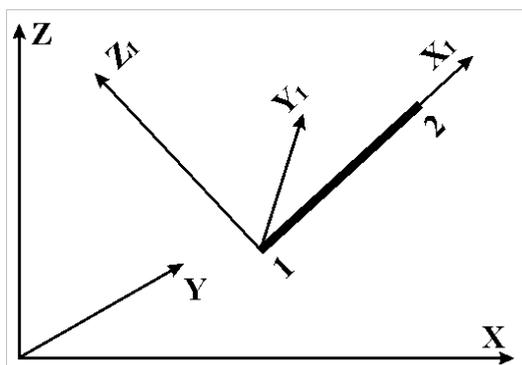


Рисунок 16.2 Физически нелинейный универсальный шаговый КЭ пространственного стержня

Конечный элемент допускает наличие абсолютно жёстких вставок произвольной ориентации. Задание абсолютно жёстких вставок, шарниров, местных нагрузок аналогично типу КЭ-10.

Для бетонных и железобетонных элементов ( $\sigma_{кр}^+ \leq 0,25|\sigma_{кр}^-|$ ) проверяется предельная несущая способность сечения (в начале и конце стержня), при превышении которой назначается шарнир по соответствующему направлению.

### **КЭ-304 геометрический нелинейный КЭ «Нить»**

Представленный КЭ обеспечивает расчёт вантовых систем с учётом геометрической нелинейности. Работает во всех признаках схемы, кроме плоских плит и ростверков.

На каждом шаге нагружения производится учёт нормальных напряжений и изменения геометрий при построении матрицы жёсткости.

### **КЭ-307 геометрически нелинейный КЭ тонкостенного стержня**

Данный КЭ обеспечивает расчёт конструкций с тонкостенными стержнями согласно теории Власова и имеет дополнительную степень свободы. На каждом шаге нагружения производится учёт всех усилий и изменения геометрии при построении матрицы жёсткости. Работает только при расчёте пространственных конструкций с учётом деформации стержней (X, Y, Z, UX, UY, UZ, W).

 *Рекомендуется, чтобы первое нагружение схемы, содержащей КЭ-308, представляло собой заданное натяжение (специальная нагрузка) для придания требуемой формы основному телу конструкции. В матрицу жёсткости при заданном натяжении подаются только величины натяжения без учёта длины фаркопа.*

Для учёта в дальнейшем полученной формы основного тела сооружения необходимо остальные нагружения сцеплять с первым. Все нагружения кроме первого могут содержать любые нагрузки – собственный вес, температура и др. Рекомендуется для расчёта применять 4-й шаговый метод.

### **КЭ-309 геометрически нелинейный КЭ стержня сильного изгиба**

Данный КЭ обеспечивает расчёт всех видов стержневых систем с учётом сильного изгиба.

КЭ работает только при расчёте пространственных конструкций и плоских рам.

На каждом шаге нагружения производится учёт всех усилий и изменения геометрии при построении матрицы жёсткости.

Матрица жёсткости формируется в системе координат «нового положения», а затем переводится в исходную систему при помощи направляющих косинусов.

Усилия вычисляются в системе координат «нового положения».

### **КЭ-310 геометрически нелинейный универсальный КЭ стержня**

Данный КЭ обеспечивает расчёт всех видов стержневых систем.

Работает только при расчёте пространственных конструкций и плоских рам.

На каждом шаге нагружения производится учёт нормальных напряжений и изменения геометрии при построении матрицы жёсткости.

При этом полагается, что соблюдается закон Гука ( $\sigma_x = E\varepsilon_x$ ), а входящая в это выражение деформация имеет следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] - z \frac{d^2w}{dx^2} - y \frac{d^2w}{dx^2} \quad (16.1)$$

### **КЭ-410 физически и геометрически нелинейный универсальный КЭ стержня**

Представленный КЭ позволяет учитывать одновременно физическую и геометрическую нелинейности при расчёте стержневых систем.

Жесткостные характеристики задаются как для физически нелинейного элемента.

Расчёт производится шаговым методом. На каждом шаге матрица жёсткости формируется в системе координат «нового положения» с учётом изменения касательного модуля деформации.

## **16.3 СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ**

### **КЭ-53 законтурный упругого основания (двухузловой)**

Представленный КЭ применяется для моделирования отпора полосы грунта, лежащей за пределами плиты и перпендикулярной к её контуру. Узлы нумеруются в произвольной последовательности.

Схематическое изображение КЭ показано ниже на рисунке 16.3.

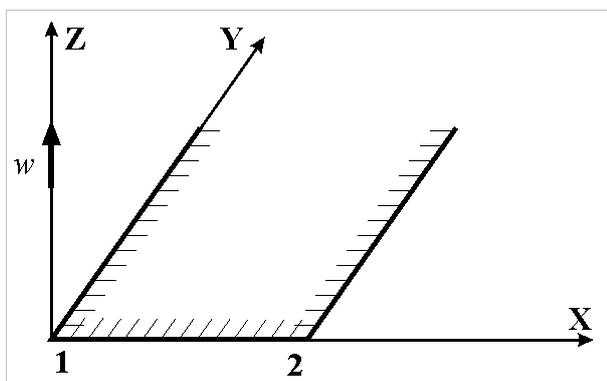


Рисунок 16.3 Законтурный двухузловой КЭ упругого основания

В каждом из узлов КЭ имеется по одной степени свободы  $W$ , определённой относительно осей общей системы координат. Введение шарниров в узлах элемента, а также его дробление не допускаются. Данному КЭ присваиваются коэффициенты постели  $C1$  и  $C2$  модели Пастернака. В результате расчёта вычисляются реакции в узлах элемента.

### **КЭ-54 законтурного упругого основания (одноузловой)**

Данный КЭ применяется при моделировании отпора угловой зоны грунта, примыкающего к углу плиты. На рисунке 16.4 представлено схематическое изображение КЭ.

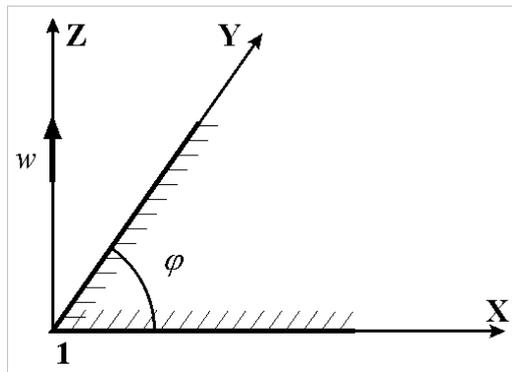


Рисунок 16.4 Законтурный КЭ упругого основания

Элемент состоит из одного узла, имеющего одну степень свободы  $W$ , определённую относительно осей общей системы координат.

Данному КЭ присваиваются коэффициент постели  $C2$  модели Пастернака и угол зоны грунта в градусах, измеряемый между нормальными к сторонам, входящим в угол плиты.

В результате расчёта вычисляется реакция в элементе.

#### **КЭ-55 упругой связи (двухузловой)**

Данный КЭ предназначен для учёта податливости связи между смежными узлами. В каждом узле степени свободы соответствуют типу создаваемой задачи и определены относительно осей глобальной системы координат. Таким образом, элемент позволяет смоделировать как линейную, так и угловую податливость связи относительно осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  глобальной системы координат.

Узлы, между которыми моделируется податливость, могут иметь одинаковые координаты, так как в матрицу жёсткости этого КЭ не входит его длина.

Предназначен для расчёта пространственных конструкций, ферм, объёмных массивов. В результате расчёта вычисляются реакции в связях, наложенных вдоль соответствующих осей общей системы координат.

В редакторе сечений/жёсткостей необходимо задать параметры жёсткости КЭ:

- погонная жёсткость связи на растяжение-сжатие вдоль глобальной оси  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ ;
- погонная жёсткость связи на поворот вокруг глобальной оси  $R_{ux}$ ,  $R_{uy}$ ,  $R_{uz}$ .

 Длина элемента при формировании матрицы жёсткости принята равной единице.

#### **КЭ-56 упругой связи (одноузловой)**

Представленный КЭ используется при необходимости ввода упругой связи по направлению (или вокруг) одной из глобальных или локальных осей координат узла. Так, для степеней свободы  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , конечный элемент позволяет смоделировать работу пружины (упругого основания).

С помощью этого КЭ можно смоделировать полное защемление узла.

Усилия, полученные в таком элементе, являются реакциями в узле.

Степени свободы в узле соответствуют типу создаваемой задачи и определены относительно осей глобальной или локальной системы координат узла.

### **КЭ-207 физически нелинейный специальный КЭ предварительного обжатия (домкрат)**

Данный КЭ используется при моделировании элементов, которые подвергаются предварительному обжатию. Расчёт при этом выполняется шагово-итерационным методом.

Жёсткость задаётся численно в разделе специальные сечения редактора сечений/жёсткостей при помощи ввода значения в текстовую строку. Также необходимо задать сжимающее усилие  $N$ .

Рекомендуется, чтобы первое нагружение схемы, содержащей КЭ 207, представляло собой заданное обжатие. Последующие нагружения сцепляются с первым. Все нагружения кроме первого могут содержать любые нагрузки – собственный вес, температура и др.

***Внимание!** Если на каком-либо шаге расчёта значение  $N_{max}$  хотя бы в одном из КЭ-207 будет превышено, то расчёт прекратится, а элементы сохранят усилия предыдущего шага. По этой причине рекомендуется задавать не менее двух шагов расчёта.*

### **КЭ-208 физически нелинейный специальный КЭ предварительного натяжения (фаркоп)**

Данный КЭ предназначен для моделирования, например, работы предварительно натянутых тросов, удерживающих шпунтовое ограждение. Расчёт производится шагово-итерационным методом.

Жёсткость задаётся численно при помощи ввода значения в текстовую строку, в разделе специальные сечения редактора сечений/жёсткостей. Также должно быть задано растягивающее усилие  $N$ .

Рекомендуется, чтобы первое нагружение схемы, содержащей КЭ 208, представляло собой заданное натяжение. Последующие нагружения сцепляются с первым. Все нагружения кроме первого могут содержать любые нагрузки – собственный вес, температура и др.

***Внимание!** Если на каком-либо шаге расчёта значение  $N_{max}$  хотя бы в одном из КЭ 208 будет превышено, то расчёт прекратится, а элементы сохранят усилия предыдущего шага. По этой причине рекомендуется задавать не менее двух шагов расчёта.*

### **КЭ-255 физически нелинейный специальный КЭ упругих связей с учётом предельных усилий (двухузловой)**

Представленный двухузловой КЭ применяется для учёта односторонних связей между двумя узлами.

В каждом узле степени свободы соответствуют типу создаваемой задачи и определены относительно осей местной системы координат. Таким образом, элемент позволяет моделировать как линейную, так и угловую податливость связи относительно осей  $X1$ ,  $Y1$ ,  $Z1$  местной системы координат.

Данный КЭ позволяет учесть неравные пределы податливости связи по прямому и противоположному направлениям. Например, предельное усилие растяжения в связи не равно предельному усилию сжатия.

Узлы, между которыми моделируется податливость, не могут иметь одинаковые координаты. Длина элемента при формировании матрицы жёсткости принята равной единице.

Предназначен для расчёта пространственных конструкций, ферм, объёмных массивов.

В результате расчета вычисляются усилия в связях. Знаки усилий определяются знаками разностей соответствующих перемещений или поворотов между конечным и начальным узлами КЭ.

В редакторе сечений/жёсткостей необходимо задать Параметры жёсткости КЭ:

- погонные жёсткости связи на растяжение-сжатие вдоль местных осей  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ ;
- погонные жёсткости связи на поворот вокруг местных осей  $R_{ux}$ ,  $R_{uy}$ ,  $R_{uz}$ ;
- предельные усилия на растяжение-сжатие и повороты.

### **КЭ-263 физически нелинейный специальный, односторонний элемент трения (одноузловой)**

КЭ используется при моделировании скольжения в односторонней связи, ориентированной вдоль одной из глобальных или локальных осей координат узла.

Применяется условие трения Кулона:  $|\tau| \leq -\gamma\sigma$ , где:

- $\tau$  и  $\sigma$  – касательное и нормальное напряжения;
- $\gamma$  – коэффициент трения покоя.

В редакторе сечения/жёсткостей задаются параметры жёсткости:

- $R$  – погонная жёсткость связи на растяжение-сжатие, т/м;
- $Q$  – погонная жёсткость сцепления, т/м;
- $\gamma$  – коэффициент трения покоя;
- $b$  – зазор, мм.

Радио-кнопкой отмечается работа связи либо на растяжение, либо на сжатие. Также при помощи раскрывающегося окна задается направление.

### **КЭ-264 физически нелинейный специальный односторонний элемент трения (двухузловой)**

Представленный КЭ используется при моделировании скольжения в односторонней связи. Направление связи выстраивается в соответствии с координатами узлов, описывающих данный КЭ, и совпадает с продольной осью  $X1$ .

Используется условие трения Кулона:  $|\tau| \leq -\gamma\sigma$ , где:

- $\tau$  и  $\sigma$  – касательное и нормальное напряжения;
- $\gamma$  – коэффициент трения покоя.

В редакторе сечения/жёсткостей задаются параметры жёсткости:

- $R$  – погонная жёсткость связи на растяжение-сжатие, т/м;
- $Q$  – погонная жёсткость сцепления, т/м;
- $\mu$  – коэффициент трения покоя;
- $b$  – зазор, мм.

Радио-кнопкой отмечается работа связи либо на растяжение, либо на сжатие. Также при помощи раскрывающегося окна задается направление.

 *Длина элемента при формировании матрицы жёсткости принята равной единице. Величина зазора со знаком «+» при растяжении или со знаком «-» при сжатии.*

### **КЭ-265 физически нелинейный специальный КЭ односторонних упругих связей (двухузловой)**

Представленный двухузловой КЭ используется при моделировании односторонних связей между двумя узлами, является аналогом КЭ-55 с учётом односторонней работы.

В каждом узле степени свободы соответствуют типу создаваемой задачи и определены относительно осей глобальной системы координат. Таким образом, элемент позволяет смоделировать как линейные, так и угловые односторонние связи относительно осей  $X1$ ,  $Y1$ ,  $Z1$  местной системы координат.

Данный КЭ позволяет учесть неравные предельные (прямые и противоположные) усилия в связях. Например, предельное усилие растяжения в связи не равно предельному усилию сжатия.

Узлы, между которыми моделируется связь, не могут иметь одинаковые координаты. Длина элемента при формировании матрицы жёсткости принята равной единице.

Предназначен для расчёта пространственных конструкций, ферм, объёмных массивов.

В результате расчёта вычисляются усилия в связях. Знаки усилий определяются знаками разностей соответствующих перемещений или поворотов между конечным и начальным узлами КЭ.

В редакторе сечения/жёсткостей необходимо задать параметры по линейным и по поворотным направлениям:

- погонные жёсткости связи на растяжение-сжатие и повороты;
- зазоры по всем направлениям.

При помощи радио-кнопки нужно указать принцип работы:

- упруго на сжатие;
- упруго на растяжение;
- упругая связь.

 *Длина элемента при формировании матрицы жёсткости принята равной единице. Величина зазора со знаком «+» при растяжении или со знаком «-» при сжатии.*

**КЭ-266 физически нелинейный специальный КЭ односторонних упругих связей (одноузловой)**

Представленный одноузловой КЭ применяется для введения связей конечной жёсткости вдоль и/или вокруг глобальных или локальных осей координат узла.

КЭ является нелинейным и предназначен для моделирования односторонних (воспринимающих либо растяжение, либо сжатие) линейных связей.

С помощью этого КЭ можно смоделировать полное защемление узла.

Усилия, полученные в этом КЭ, соответствуют реакциям в узле.

Степени свободы в узле соответствуют типу создаваемой задачи и определены относительно осей глобальной или локальной системы координат узла.

**КЭ-256 физически нелинейный специальный КЭ упругих связей с учётом предельных усилий (одноузловой)**

Представленный одноузловой КЭ используется при введении связей конечной жёсткости вдоль и/или вокруг глобальных или локальных осей координат узла.

При помощи этого КЭ возможно моделировать полное защемление узла.

Усилия, полученные в этом КЭ, соответствуют реакциям в узле.

Степени свободы в узле соответствуют типу создаваемой задачи и определены относительно осей глобальной системы координат.

**КЭ-62, КЭ-63 двумерной не отражающей границы**

Данный КЭ предназначен для моделирования не отражающей границы при динамических расчётах трехмерных грунтовых массивов. В статической задаче конечный элемент моделирует связи по перпендикулярному к поверхности направлению.

Может быть представлен как треугольный КЭ-62 и как четырёхугольный КЭ-63.

**КЭ-68 одномерной не отражающей границы**

Данный КЭ предназначен для моделирования не отражающей границы при динамических расчётах двумерных грунтовых массивов. В статической задаче конечный элемент моделирует связи по перпендикулярным к оси направления.

**КЭ-308 геометрически нелинейный специальный КЭ предварительного натяжения**

Представленный КЭ используется при моделировании предварительного натяжения, передаваемого в узлы основного тела конструкции. Жёсткости задаются как для обычного стержня.

## 16.4 ПЛАСТИНЧАТЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

### КЭ-12, КЭ-19 тонкой плиты

Представленный КЭ используется при прочностном расчёте тонких плит.

Может иметь вид как треугольного КЭ плиты (рисунок 16.5), так и четырёхугольного КЭ (рисунок 16.6).

КЭ плиты имеет местную систему координат. Нумерацию узлов необходимо производить в направлении, противоположном вращению часовой стрелки относительно главной оси  $Z$ .

В каждом из узлов КЭ плиты имеется по три степени свободы:

- $W$  ( $w$ ) – вертикальный прогиб, положительное направление которого совпадает с направлением оси  $Z$  ( $Z_1$ );

- $UX$  ( $\alpha = \frac{dw}{dy}$ ) – угол поворота относительно оси  $X_1$ , положительное направление которого противоположно направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с конца оси  $X_1$ ;

- $UY$  ( $\beta = -\frac{dw}{dx}$ ) – угол поворота относительно оси  $Y_1$ , положительное направление которого противоположно направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с конца оси  $Y_1$ .

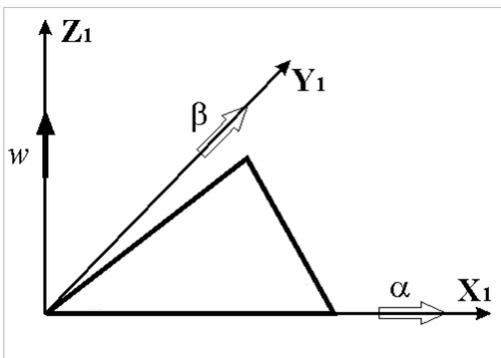


Рисунок 16.5 Схематическое изображение КЭ-12

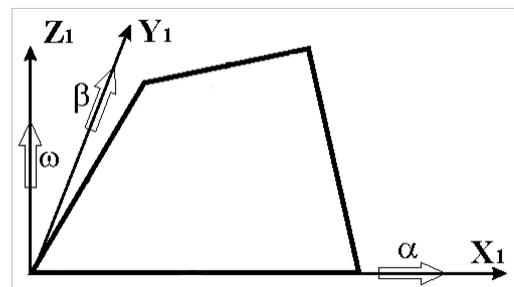


Рисунок 16.6 Схематическое изображение КЭ-19

Представленный КЭ должен лежать в горизонтальной плоскости. Допускается учёт ортотропии.

### КЭ-16, КЭ-17 толстой плиты

Данный КЭ предназначен для прочностного расчёта толстых плит. Используется функционал Рейснера.

В каждом из узлов КЭ имеется по три степени свободы:

- $W$  ( $x, y$ ) – вертикальное перемещение (прогиб), положительное направление которого совпадает с направлением оси  $Z_1$ ;

- $UX$  и  $UY$  – углы поворота относительно осей  $X_1$  и  $Y_1$ , положительное направление которых противоположно направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с конца этих осей.

Степени свободы  $W$ ,  $UX$ ,  $UY$  отвечают изгибным деформациям. Представленный КЭ должен лежать в горизонтальной плоскости. Допускается учёт ортотропии.

### КЭ-24, КЭ-27 плоского напряжения/деформации (балка-стенка)

Данный КЭ предназначен для прочностного расчёта пластин, нагруженных в своей плоскости (плоскость  $X_1OZ_1$ ). По умолчанию конечный элемент позволяет моделировать плоское напряжённое состояние.

Может быть представлен как универсальный треугольный КЭ-24 плоской задачи (рисунок 16.7), так и универсальный четырёхугольный КЭ-27 плоской задачи (рисунок 16.8).

Каждый из узлов КЭ имеет следующие степени свободы:

- $U$  – линейное перемещение вдоль оси  $X$ , положительное направление которого совпадает с направлением данной оси;
- $V$  – линейное перемещение вдоль оси  $Y$ , положительное направление которого совпадает с направлением данной оси;
- $W$  – линейное перемещение вдоль оси  $Z$ , положительное направление которого совпадает с направлением данной оси.

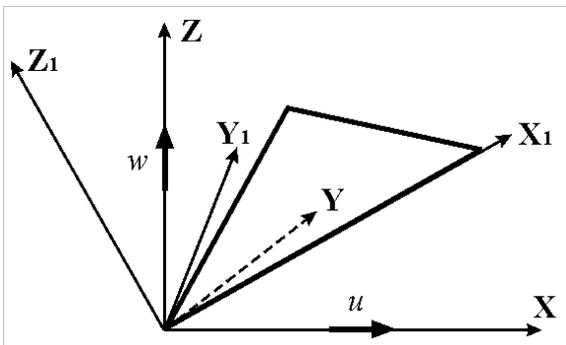


Рисунок 16.7 Схематическое изображение КЭ-24

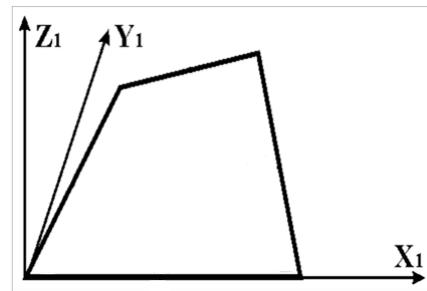


Рисунок 16.8 Схематическое изображение КЭ-27

КЭ-27 может быть произвольно расположен по отношению к плоскостям  $XOZ$ ,  $YOZ$ ,  $XOY$  общей системы координат.

Допускается учёт ортотропии.

### КЭ-42, КЭ-44 тонкой оболочки

Представленный КЭ используется при прочностном расчёте тонких пологих оболочек.

В каждом из узлов КЭ имеется по шесть степеней свободы:  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $UX$ ,  $UY$ ,  $UZ$ .

- $U$  – горизонтальное перемещение, положительное направление которого совпадает с направлением  $X_1$ ;

- $V$  – горизонтальное перемещение, положительное направление которого совпадает с направлением  $Y_1$ ;
- $W$  ( $w$ ) – вертикальное перемещение (прогиб), положительное направление которого совпадает с направлением оси  $Z_1$ ;
- $UX$   $\left( \alpha = \frac{dw}{dy} \right)$  – угол поворота относительно оси  $X_1$ , положительное направление которого противоположно направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с конца оси  $X_1$ ;
- $UY$   $\left( \beta = -\frac{dw}{dx} \right)$  – угол поворота относительно оси  $Y_1$ , положительное направление которого противоположно направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с конца оси  $Y_1$ ;
- $UZ$  ( $\gamma$ ) – угол поворота относительно оси  $Z_1$ .

Степени свободы  $U$ ,  $V$  отвечают мембранным, а  $W$ ,  $UX$ ,  $UY$  – изгибным деформациям. Угол поворота  $UZ$  не входит в число узловых параметров, определяющих деформации элемента. Эта степень свободы необходима для учёта пространственной работы конструкции при стыковке элементов, не лежащих в одной плоскости.

Представлен как универсальный треугольный КЭ-42 оболочки (рисунок 16.9) и как универсальный четырёхугольный КЭ-44 оболочки (рисунок 16.10).

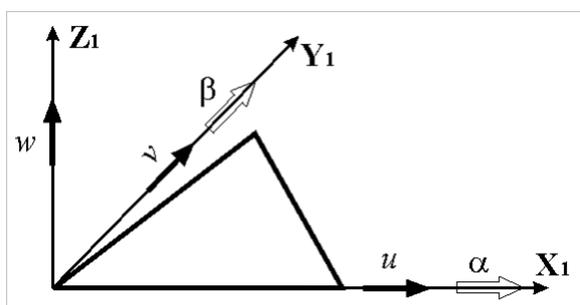


Рисунок 16.9 Схематическое изображение КЭ-42

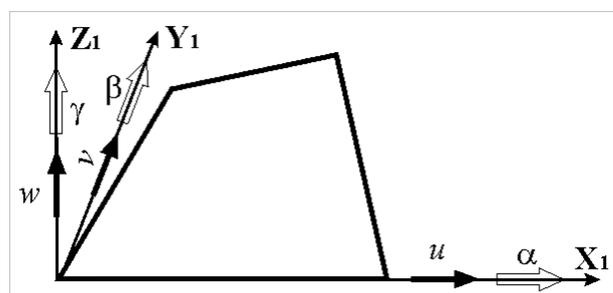


Рисунок 16.10 Схематическое изображение КЭ-44

Допускается учёт ортотропии.

#### **КЭ-46, КЭ-47 толстой оболочки**

Данный КЭ предназначен для прочностного расчёта толстых пологих оболочек. Используется функционал Рейснера.

В каждом из узлов КЭ имеется по шесть степеней свободы:

- $U$  – горизонтальное перемещение, положительное направление которого совпадает с направлением  $X_1$ ;
- $V$  – горизонтальное перемещение, положительное направление которого совпадает с направлением  $Y_1$ ;

- $W(x,y)$  – вертикальное перемещение (прогиб), положительное направление которого совпадает с направлением оси  $Z_1$ ;
- $UX$  и  $UY$  – углы поворота относительно осей  $X_1$  и  $Y_1$ , положительное направление которых противоположно направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с конца этих осей;
- $UZ$  – угол поворота относительно оси  $Z_1$ .

Степени свободы  $U, V$  отвечают мембранным, а  $W, UX, UY$  – изгибным деформациям. Угол поворота  $UZ$  не входит в число узловых параметров, определяющих деформации элемента. Эта степень свободы необходима для учёта пространственной работы конструкции при стыковке элементов, не лежащих в одной плоскости.

Может иметь вид как универсального треугольного КЭ-46 толстой оболочки (рисунок 16.11), так и универсального четырёхугольного КЭ-47 толстой оболочки (рисунок 16.12).

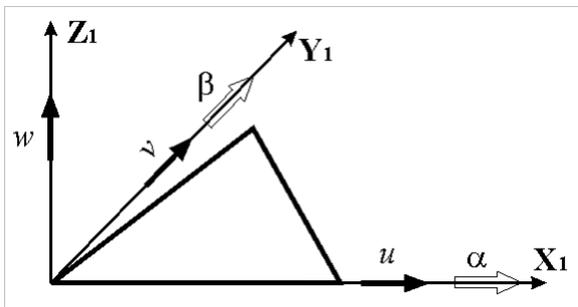


Рисунок 16.11 Схематическое изображение КЭ-46

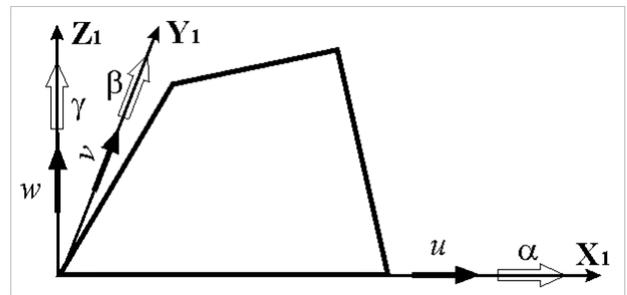


Рисунок 16.12 Схематическое изображение КЭ-47

Допускается учёт ортотропии.

### **КЭ-224, КЭ-227 физически нелинейный КЭ плоского напряжения/деформации (балка-стенка)**

КЭ предназначен для определения плоского напряженного состояния пластин, нагруженных в своей плоскости (плоскость  $X_1OZ_1$ ). Пластина рассматривается только в изотропном варианте с учетом физической нелинейности материалов. Узел конечного элемента имеет следующие степени свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z$ .

Может быть представлен как в виде физически нелинейного универсального треугольного КЭ-224 плоской задачи (рисунок 16.13), так и физически нелинейного универсального четырёхугольного КЭ-227 плоской задачи (рисунок 16.14).

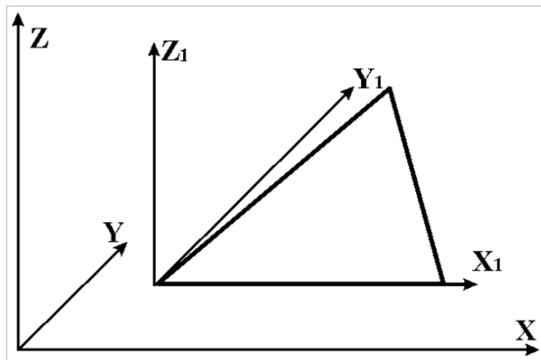


Рисунок 16.13 Схематическое изображение КЭ-224

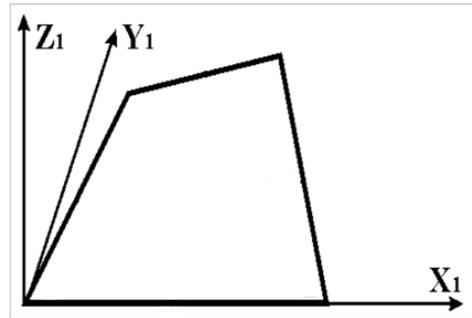


Рисунок 16.14 Схематическое изображение КЭ-227

### КЭ-242, КЭ-244 физически нелинейный шаговый КЭ тонкой оболочки

КЭ предназначен для определения напряжённо-деформированного состояния оболочек. Оболочка рассматривается как биматериальная система с изотропными физически нелинейными материалами.

Узел конечного элемента имеет шесть степеней свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X_1$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y_1$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z_1$ ;
- $UX$  – угол поворота относительно оси  $X_1$ ;
- $UY$  – угол поворота относительно оси  $Y_1$ ;
- $UZ$  – угол поворота относительно оси  $Z_1$ .

Может быть представлен как в виде физически нелинейного универсального треугольного КЭ-242 оболочки (рисунок 16.15), так и в виде физически нелинейного универсального четырёхугольного КЭ-244 оболочки (рисунок 16.16).

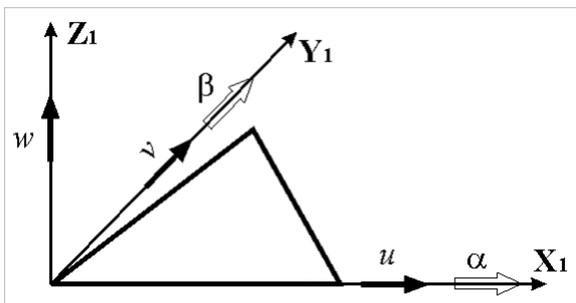


Рисунок 16.15 Схематическое изображение КЭ-242

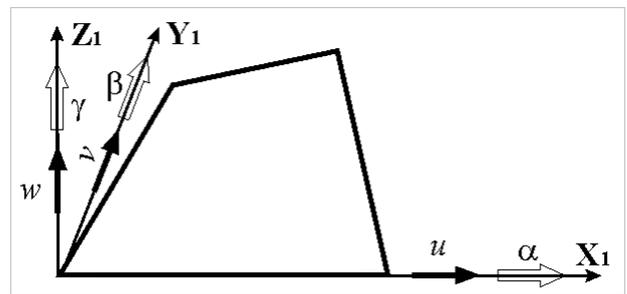


Рисунок 16.16 Схематическое изображение КЭ-244

**КЭ-246, КЭ-247 физически нелинейный шаговой КЭ толстой оболочки**

Данный КЭ предназначен для прочностного расчёта толстых пологих оболочек, которые рассматриваются как биматериальные системы с изотропными физически нелинейными материалами. Используется функционал Рейснера.

Узел конечного элемента имеет шесть степеней свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X_1$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y_1$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z_1$ ;
- $UX$  – угол поворота относительно оси  $X_1$ ;
- $UY$  – угол поворота относительно оси  $Y_1$ ;
- $UZ$  – угол поворота относительно оси  $Z_1$ .

Степени свободы  $U, V$  отвечают мембранным, а  $W, UX, UY$  – изгибным деформациям. Угол поворота  $UZ$  не входит в число узловых параметров, определяющих деформации элемента. Эта степень свободы необходима для учёта пространственной работы конструкции при стыковке элементов, не лежащих в одной плоскости.

Может иметь вид как универсального треугольного КЭ-246 толстой оболочки (рисунок 16.17), так и универсального четырёхугольного КЭ-247 толстой оболочки (рисунок 16.18).

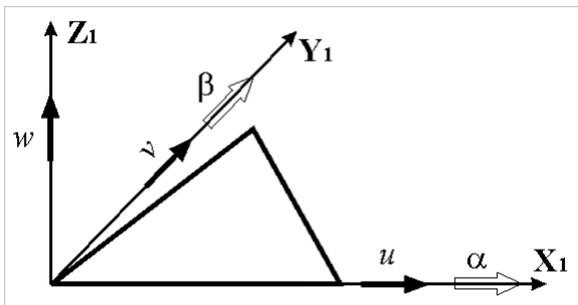


Рисунок 16.17 Схематическое изображение КЭ-246

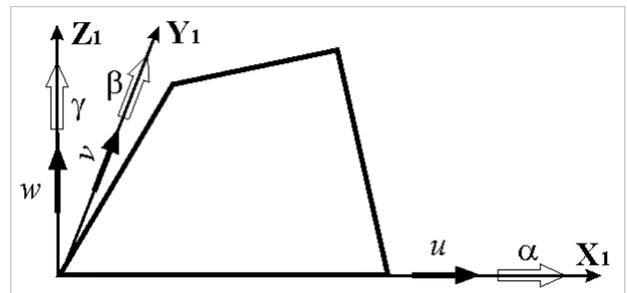


Рисунок 16.18 Схематическое изображение КЭ-247

**КЭ-282, КЭ-284 физически нелинейный КЭ плоской деформации «Грунт»**

Данный КЭ предназначен для моделирования односторонней работы грунта на сжатие с учетом сдвига по схеме плоской деформации в соответствии с законом Кулона. Применяется в нелинейном шагово-итерационном процессоре при расчётах горных выработок и тоннельных проходок.

При моделировании нелинейного нагружения должно быть задано большое количество итераций. По умолчанию принимается – 500. Прочая информация здесь задаётся как обычно.

Каждый узел КЭ имеет следующие степени свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X_1$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z_1$ .

Может быть представлен как в виде физически нелинейного треугольного КЭ-282 плоской задачи (грунт) (рисунок 16.19), так и в виде физически нелинейного универсального прямоугольного КЭ-284 плоской задачи (грунт) (рисунок 16.20).

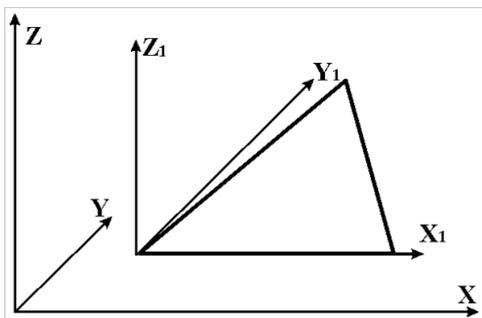


Рисунок 16.19 Схематическое изображение КЭ-282

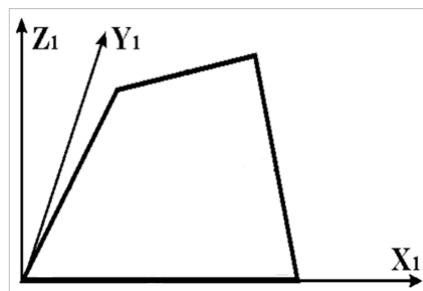


Рисунок 16.20 Схематическое изображение КЭ-284

### КЭ-342, КЭ-344 геометрически нелинейный КЭ сильного изгиба оболочки

КЭ предназначен для определения напряжённо-деформированного состояния оболочек с сильным изгибом.

Представлен как универсальный треугольный КЭ-342 оболочки, так и универсальный четырёхугольный КЭ-344 оболочки.

Узел КЭ имеет шесть степеней свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X_1$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y_1$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z_1$ ;
- $UX$  – угол поворота относительно оси  $X_1$ ;
- $UY$  – угол поворота относительно оси  $Y_1$ ;
- $UZ$  – угол поворота относительно оси  $Z_1$ .

Для оболочек с сильным изгибом на каждом шаге нагружения при построении матрицы жёсткости производится учет всех усилий и изменения геометрии. Матрица жёсткости формируется в системе координат «нового положения», а затем переводится в исходную систему при помощи направляющих косинусов. Усилия вычисляются в системе координат «нового положения».

### КЭ-342, КЭ-344 геометрически нелинейный КЭ мембраны

КЭ предназначен для определения напряжённо-деформированного состояния мембран.

Представлен как универсальный треугольный КЭ-342 оболочки, так и универсальный четырёхугольный КЭ-344 оболочки.

Узел КЭ имеет три степени свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X_1$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y_1$ ;

- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z1$ .

### **КЭ-342, КЭ-344 геометрически нелинейный КЭ оболочки**

КЭ предназначен для определения напряжённо-деформированного состояния тонких пологих геометрически нелинейных оболочек.

Представлен как универсальный треугольный КЭ-342 оболочки, так и универсальный четырёхугольный КЭ-344 оболочки.

Узел КЭ имеет шесть степеней свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X1$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y1$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z1$ ;
- $UX$  – угол поворота относительно оси  $X1$ ;
- $UY$  – угол поворота относительно оси  $Y1$ ;
- $UZ$  – угол поворота относительно оси  $Z1$ .

### **КЭ-442, КЭ-444 физически и геометрически нелинейный КЭ оболочки**

Данный КЭ позволяет учитывать одновременно физическую и геометрическую нелинейности при расчёте оболочек.

Жесткостные характеристики задаются как для физически нелинейного элемента.

Расчёт производится шаговым методом. На каждом шаге матрица жёсткости формируется в системе координат «нового положения» с учётом изменения касательного модуля упругости.

Представлен как в виде треугольного элемента оболочки с учётом физической и геометрической нелинейности КЭ-442 так и в виде четырёхугольного элемента оболочки с учётом физической и геометрической нелинейности КЭ-444.

## **16.5 ОБЪЕМНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ**

### **КЭ-32, КЭ-34, КЭ-36 пространственный КЭ**

Данный КЭ предназначен для прочностного расчёта массивных пространственных конструкций.

Узел КЭ имеет три степени свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z$ .

Может быть представлен как:

- тетраэдр КЭ-32 (рисунок 16.21);
- универсальный пространственный шестиузловой изопараметрический КЭ-34 (рисунок 16.22);
- универсальный пространственный восьмиузловой изопараметрический КЭ-36 (рисунок 16.23).

• В каждом из узлов КЭ имеется по три степени свободы  $U, V, W$  – линейные перемещения вдоль осей  $X, Y, Z$ , положительные направления которых совпадают с направлением соответствующих осей.

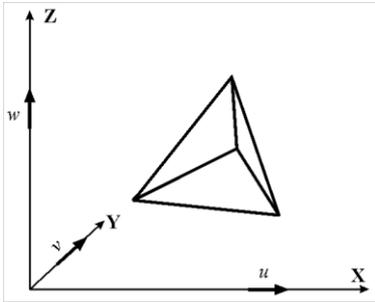


Рисунок 16.21 Схематическое изображение КЭ-32

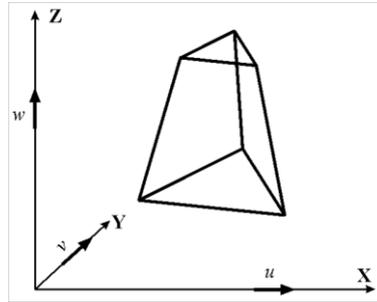


Рисунок 16.22 Схематическое изображение КЭ-34

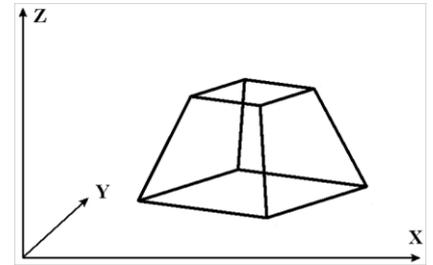


Рисунок 16.23 Схематическое изображение КЭ-36

Допускается учёт ортотропии.

### КЭ-232, КЭ-234, КЭ-236 физически нелинейный пространственный КЭ

КЭ предназначен для прочностного расчёта массивных пространственных конструкций с учётом физической нелинейности материала.

Узел КЭ имеет три степени свободы:

- $U$  – линейное перемещение по оси  $X$ ;
- $V$  – линейное перемещение по оси  $Y$ ;
- $W$  – линейное перемещение по оси  $Z$ .

Может быть представлен как:

- физически нелинейный тетраэдр КЭ-232 (рисунок 16.24);
- физически нелинейный универсальный пространственный шестиузловой изопараметрический КЭ-234 (рисунок 16.25);
- физически нелинейный универсальный пространственный восьмиузловой изопараметрический КЭ-236 (рисунок 16.26).

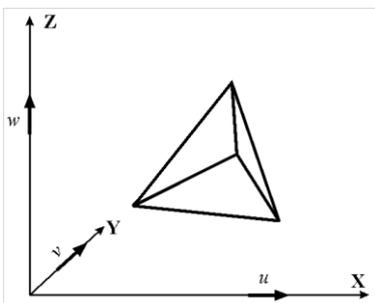


Рисунок 16.24 Схематическое изображение КЭ-232

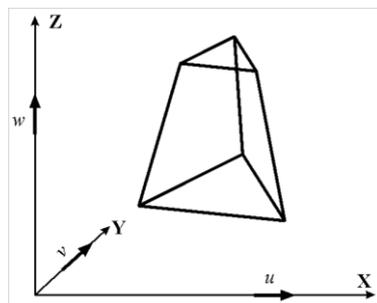


Рисунок 16.25 Схематическое изображение КЭ-234

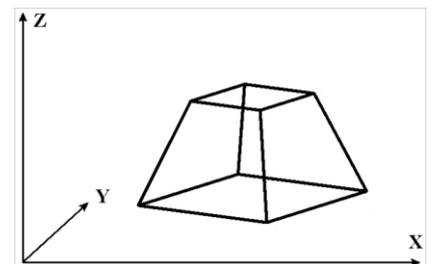


Рисунок 16.26 Схематическое изображение КЭ-236

**КЭ-272, КЭ-274, КЭ-276 физически нелинейный пространственный КЭ «Грунт»**

Данный КЭ предназначен для моделирования односторонней работы грунта на сжатие с учётом сдвига (по различным теориям).

Учёт специфики грунтов обеспечивается заданием одного из условий прочности:

- условие Боткина:

$$\sin(\varphi)\sigma_0 + 3\sigma_i - 2C \cos(\varphi) \leq 0; \quad (16.2)$$

- условие Друккера-Прагера:

$$2 \sin(\varphi)\sigma_0 - 3\sigma_i - 6C \cos(\varphi) \leq 0; \quad (16.3)$$

- условие Кулона-Мора:

$$\sin \varphi (\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_3) - 2C \cos \varphi \leq 0; \quad (16.4)$$

- аналитическая теория:

$$-((\sigma_1 + \sigma_3)/s\gamma + 1)^\alpha ((\sigma_1 + \sigma_3)/s\delta + 1)^\beta + (\sigma_1 - \sigma_3)/\tau \leq 0, \quad (16.5)$$

где,  $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ;  $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ ;  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \leq R_s$  – главные напряжения;  $R_s$  – предельное напряжение при растяжении;  $C$  – сцепление;  $\varphi$  – угол внутреннего трения. Допускается учёт предварительного напряжения. Величины, входящие в (16.5), определяются экспериментально.

Каждый узел конечного элемента имеет следующие степени свободы:

- U – линейное перемещение по оси X1;
- V – линейное перемещение по оси Y1;
- W – линейное перемещение по оси Z1.

Может быть представлен в виде:

- физически нелинейный объёмный КЭ-272 грунта в форме тетраэдра (рисунок 16.27);
- физически нелинейный объёмный 6-ти узловой изопараметрический КЭ-274 грунта (произвольная треугольная призма) (рисунок 16.28);
- физически нелинейный объёмный 8-ми узловой изопараметрический КЭ-276 грунта (произвольный гексаэдр) (рисунок 16.29).

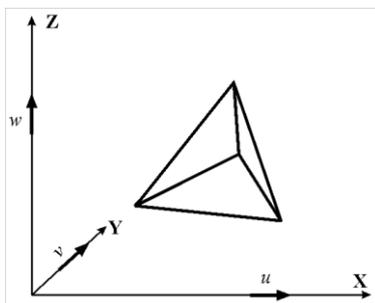


Рисунок 16.27 Схематическое изображение КЭ-272

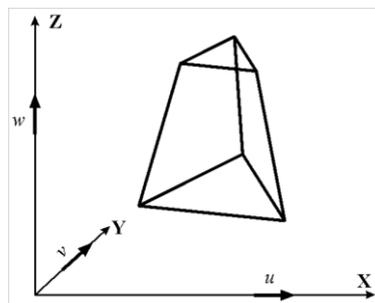


Рисунок 16.28 Схематическое изображение КЭ-274

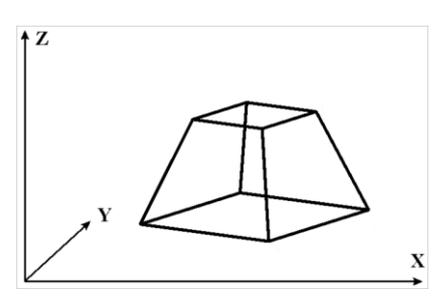


Рисунок 16.29 Схематическое изображение КЭ-276